フラクタル幾何を学校での算数・数学の教材として頻繁に扱われ始めてから、40 年近く経つのでしょうか。フラクタル図形とは、「図のどの部分をとってみても自分に相似な部分から成り立っている」というような図形のことを言います。つまり、マクロな形とミクロな形が相似形になっているのです。この操作をいくら続けても相似な形が現れるのですが、この性質をフラクタル図形の自己相似性と言い、自然界の事物、生物の形にも存在します。当時は数学的活動とか数学活用・課題学習などのような走りをしていて、今ではプログラミング学習や STEAM のような仕組みを当たり前のように盛り込んでいます。

フラクタル教材の教育的価値は、幾何モデルからの合同・相似・求積（面積や体積）、極限概念、複素数、指数・対数関数（フラクタル次元）、確率、座標上の変換などバラエティーに富んでいます。例えば、図 1 のようなコッホ曲線をプログラミングで作成する際、連立 1 次方程式 $\begin{cases} 5x+3y=7 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ を行列 $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ で表す 1 次変換による、(7, 3) の像 $(x,\ y)$ を表していると考えることができます。

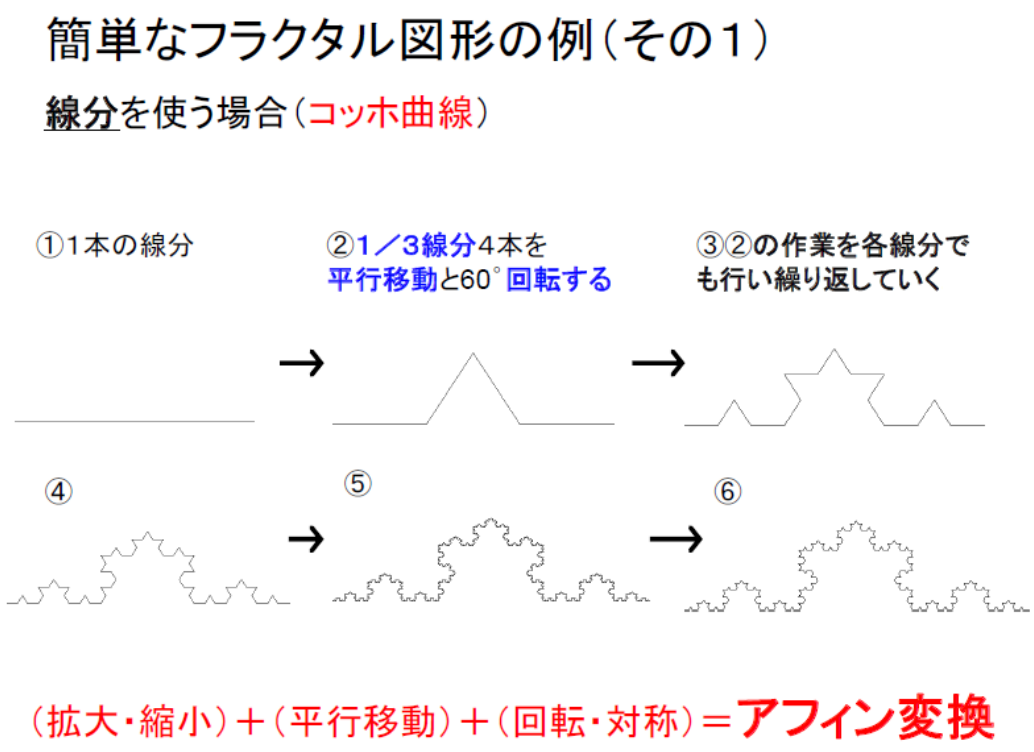
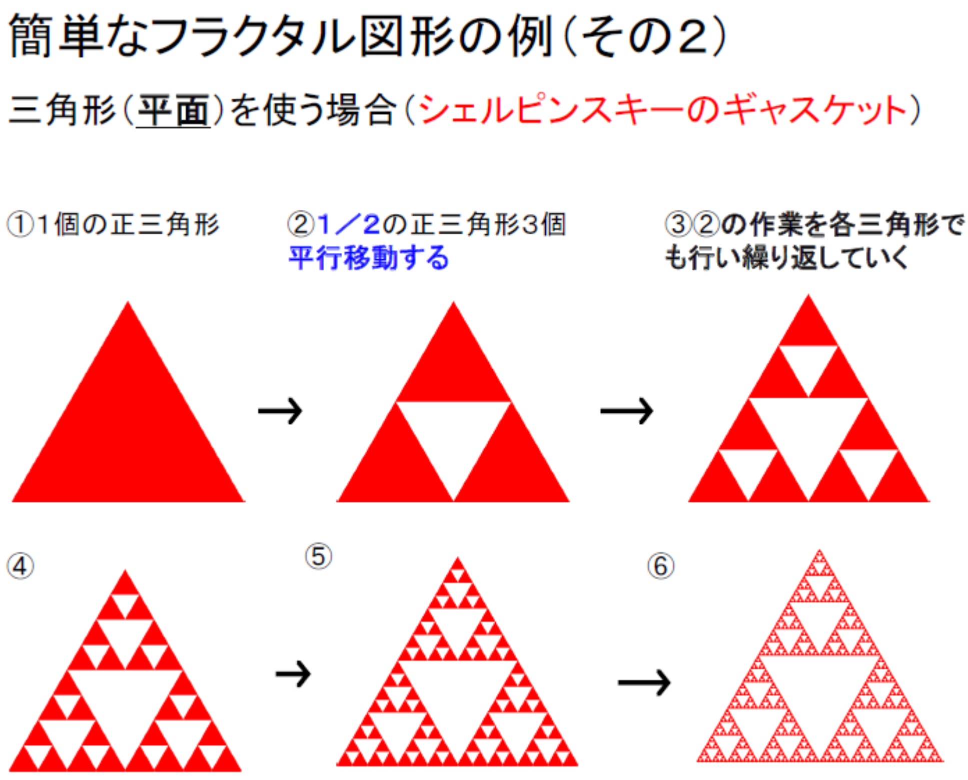


図 1　コッホ曲線

あたかも座標平面上の図形の変換や移動の表現が可能であるように思えます。ところが、実はこの変換だけでは平行移動はできません。連立方程式を $\begin{cases} 5x+3y-1=7 \\ 2x+y+4=3 \end{cases}$ のように行列 $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ を付け加えただけで実現できるのです。小学校 6 年生で対称な図形・拡大縮小図、中学校 1 年生では平行移動・回転移動・対称移動を扱った図形活動をしますが、これらを統合したプログラミング学習を中等教育段階（特に高校）で実現してほしいものです。

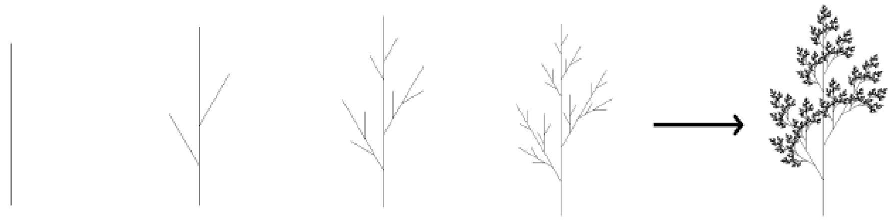
【プログラミングによるその他のフラクタル図形】



応用例

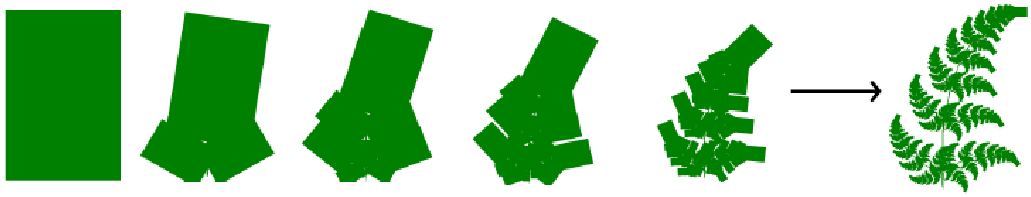
「線」の場合

樹木

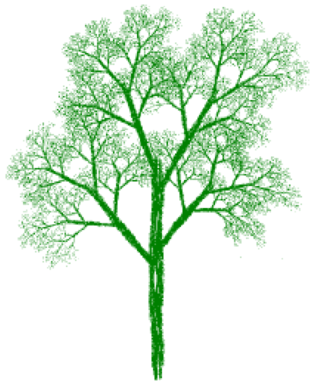


「面」の場合

シダ



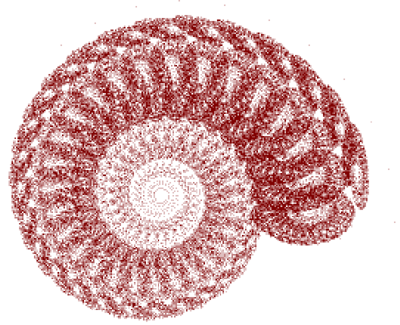
応用例
プログラム出力



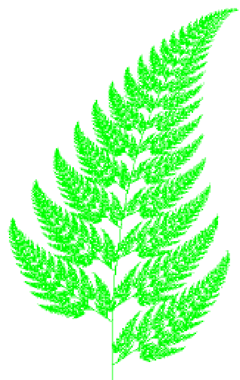
木

鳥の羽根
馬頭星雲etc

アンモナイト



シダ



　このような取り組みは、タイ王国やスウェーデン王国などのセカンダリースクールとの国際遠隔協働学習を通して開発実現したものでした。

　ドイツ滞在時にも、フラクタルにまつわるものにいろいろと出会いました。立体図形ではシェルピンスキーの正四面体が有名ですが、以前ご紹介した Giesen の数学博物館「mathematikum」内ホールの天井に吊り下げられた正二十面体のフラクタル立体らしきもの（現在は撤去されているようです）が、私の脳裏からどうしても離れませんでした。帰国してからじっくりと計算をした上で、15 年前に手作りで写真 1 のようなものを実現することができました。

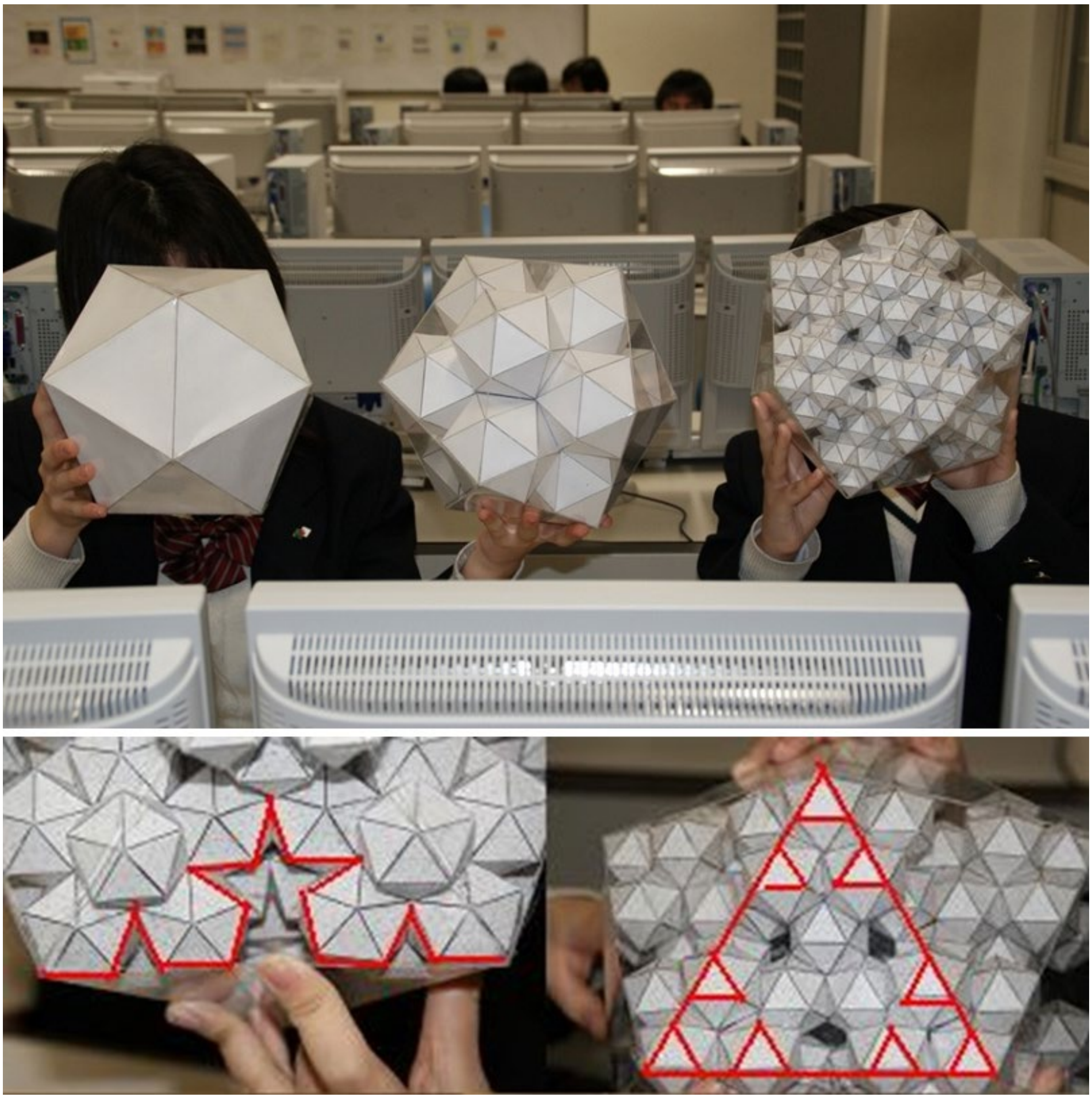


写真 1　正二十面体のフラクタル立体

正二十面体を縮小して 12 個繋げば、元の正二十面体の概形になります。それを繰り返せばいいのですが、144 個繋げるだけで疲弊してしまいました。作品をじっくり観察してみれば、1 次元ではコッホ曲線らしき、2 次元ではシェルピンスキーのギャスケットらしきものが浮かび上がるのが分かります。縮小率を算出すれば明らかなのですが、表面積の総和、相似性次元、ピースの個数は？ なども、作ってみて初めて面白い性質を見つけたりすることができるのです。

ある日、ハイデルベルクの街を歩いていたときに美術展のパネルを見つけ、数学と書いてあったため面白そうと思い訪れてみたことがあります。どうやらフラクタル幾何学は、数学をサイエンスやテクノロジーだけでなく、芸術にも結び付ける橋渡しのような役割を担ってくれるようですね。